UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA

Notas de Aulas

ELETRICIDADE E MAGNETISMO

Volume I

eletrostática e magnetostática

Wilson Hugo C. Freire

Campina Grande - PB

2010

APRESENTAÇÃO

Estas notas foram escritas para servir como texto ou roteiro de estudo do conteúdo das disciplinas Eletricidade e Magnetismo e Física Geral 3 dos cursos de Engenharia e Física da UFCG - Campus de Campina Grande. No entanto pode ser adaptado em disciplinas similares de cursos de outras instituições. A proposta do texto é apresentar a eletrostática e a magnetostática, deixando o conteúdo sobre eletrodinâmica de Faraday-Maxwel e aplicações (circuitos, ondas eletromagnéticas, óptica etc.) para um segundo volume. Procurou-se apresentar uma abordagem do assunto com um formalismo matemático que julgo adequado a um curso deste nível. Isto não significa que seja um formalismo completo para o tema em consideração, mas que evite certos vícios oriundos de excessiva "escalarização" de quantidades vetoriais, escalarização esta muito comum em textos de física básica e que, a meu ver, obscurecem a completeza das idéias. Baseio-me no princípio (integrador) de que se a estrutura curricular dos cursos em questão possui o conteúdo de cálculo diferencial e integral vetorial (a várias variáveis), então esta linguagem deve ser utilizada na física pois permite uma visão de conteúdo mais ampla e precisa. E por essa razão o texto pode também ser usado como apoio em estudos de transição para disciplinas de eletromagnetismo do ciclo profissional de física. Entretanto, apesar dos exemplos (alguns chamam exercícios resolvidos) colocados neste texto refletirem aplicações (algébricas em sua maioria) dos conteúdos apresentados, os exercícios são de caráter mais numérico-qualitativo ou, algumas vezes, vetorial-quantitativo, o que é característico de disciplinas de eletricidade e magnetismo a nível básico. Assim os fatos aqui colocados constituem minha proposta e depoimento pessoal sobre tais cursos. O risco de críticas faz parte do trabalho acadêmico de qualquer autor e reflete a leitura do trabalho do autor por colegas professores e alunos, portanto serão bem acolhidas e discutidas objetivando melhoria do texto ora proposto.

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: Esta é uma versão preliminar do texto que pretendo concluir. As figuras serão expostas na sala de aula.

Conteúdo

Capítulo 1

Eletrostática

1.1 Introdução

Os fenômenos elétricos e magnéticos têm origem no conceito de carga elétrica. De um ponto de vista macroscópico, cargas elétricas são atributos adquiridos por amostras de materiais sob certas circunstâncias (em dias secos p/ex.) e em certos processos (atrito) que fazem com que estas amostras passem a atrair pedaços de papel próximos. Por exemplo ao atritarmos, num dia seco, um pedaço de vidro com um pano de lã estes materiais, o vidro e a lã, adquirem a propriedade de atrair pequenos pedaços de papel. Esta propriedade é designada como carga elétrica.

Importante dizer de início que fenômenos deste tipo e outros semelhantes são conhecidos há pelo menos 2600 anos e têm chamado atenção de muitos pesquisadores a medida que os séculos se passaram, o que levou ao desenvolvimento da teoria eletromagnética na segunda metade do século XIX, notadamente após os trabalhos de Coulomb, Franklim, Faraday, Romagnose, Oerested, Ampère entre muitos outros antes da síntese proposta por Maxwell no final do século de 1919.

Descobriu-se que há dois tipos de carga. Se repetirmos as experiências anteriormente mencionadas com outras amostras idênticas de vidro e de lã verifica-se que os bastões de vidro se repelem ao ser aproximados, o mesmo ocorrendo com os pedaços de lã, ao passo que um bastão de vidro e um pedaço de lã de se atraem quando aproximados um do outro. Depois estas experiências foram realizadas com outros materiais, por exemplo uma amostra de ebonite atritada com pelo de animal. Verificou-se, por exemplo, que a ebonite passava a atrair um dos pedaço de vidro da experiência anterior quando colocados próximos. Enfim, várias experiências levaram a conclusão de que há dois tipos de carga elétrica. Destacamos:

▲ **Fato 1(Existência de Dois Tipos de Carga Elétrica):** Interpreta-se as experiêmcias acima mencionadas dizendo que há dois tipos de carga: nos processos acima descritos a carga associada ao vidro é chamada carga vítrea ou positiva e a carga associada a ebonite é chamada resinosa ou negativa.

▲ **Fato 2(Atração e Repulsão):** cargas de mesmo sinal se repelem enquanto que cargas de sinais diferentes se atraem.

Os pedaços de papel que são atraídos tanto pelo vidro quanto pela ebonite estão normalmente macroscopicamente neutros mas microscopicamente com igual quantidade de cargas positivas (prótons) e negativa (elétrons) e a atração descrita se deve a um processo de separação de cargas (indução ou polarização, esta a ser descrita posteriormente) que faz com que, por exemplo, as cargas de sinal positivo fiquem mais próximas do vidro, fazendo com que (pela lei de Coulomb a ser vista adiante) a atração seja predominante.

Até agora apresentamos o conceito qualitativo/intuitio de carga elétrica mas não definimos a unidade de carga em termos de outras unidades conhecidas, ou seja, não apresentamos uma definição operacional de carga elétrica. Um procedimento para este fim é considerar a lei de Coulomb, apresentada mais adiante; entretanto é mais adequado do ponto de vista experimental definir a unidade de corrente elétrica (cargas em movimento organizado) em termos de unidades mecânicas conhecidas e em seguida definir carga em termos da corrente. Adiaremos então a definição das unidades de corrente e de carga elétrica. Por ora mencionaremos que a unidade de carga no sistema MKS (estendido) é o coulomb (C) em homenagem a Charles Coulomb, que descobriu usando uma balança de torção a lei de força entre partículas carregadas.

▲ **Fato 3(Conservação da Carga):** As cargas elétricas podem ser agrupadas e combinadas de diferentes maneiras, mas pela observação experimental a soma das cargas de um sistema fechado (ou isolado) é conservada. Este princípio vale além da física clássica. Por exemplo, um raio gama uma onda eletromagnética descrita do ponto de vista da física quântica como uma propagação de fótons. Cada um destes pode dar origem a um par elétron-pósitron, sendo o elétron negativo e o pósitron positivo, de forma que a carga total é nula antes e depois da criação do par.

Átomos, Prótons, Elétrons..., Isolantes, Condutores... De um ponto de vista da física moderna qualquer amostra de matéria é formada por um aglomerado de minúsculos átomos interligados pela interação (p/ex. atração) elétrica. Cada átomo possui um núcleo central onde se concentra praticamente toda sua massa, constituída de partículas denominadas prótons e neutrons, com cargas positiva e nula, respectivamente. Em volta deste núcleo há uma nuvem de partículas ainda muito menores e com carga negativa designadas elétrons. Em um átomo na forma usual, a quantidade de prótons é praticamente igual a de elétrons, cada qual com o mesmo valor da carga mas de sinais contrários e, por isto, a amostra do material não exibe manifestações elétricas macroscópicas. Mas quando uma tal amostra é atritada com uma amostra de outro material, por exemplo, então uma das amostras pode arrancar os elétrons mais periféricos da outra fazendo com que esta torne-se positivamente carregada enquanto aquela torne-se negativamente carregada. Os prótons e os neutrons ficam fortemente ligados aos seus núcleos [1]. Vale salientar que alguns materiais, notadamente os metais, oferecem bastante facilidade ao movimento de seus elétrons periféricos (elétrons livres) através de seu aglomerado de átomos e são, por isto, denominados condutores; mas alguns materiais, como o vidro, a borracha, o isopor etc. procuram manter as cargas adquiridas por atrito, por exemplo, nas regiões onde elas são colocadas: estes materiais são designados como isolantes ou dielétricos; há ainda materiais com propriedades intermediárias (semicondutores). A explicação destas diferenças de compotamento elétrico dos materiais vai além da física clássica.

▲ **Fato 4: Quantização da Carga:** Mais ainda, a experiência de Millikan mostrou que as cargas aparecem sempre em valores inteiros da carga elementar, ou seja da carga do elétron. Dizemos que a carga é quantizada: a carga Q de um corpo carregado é

$$Q = n \cdot e$$

onde $n > 0$(restect., < 0) é o número de elétrons por excesso(respect., por falta) e $e \approx -1,6 \times 10^{-19} C$ é a carga de um elétron.

[1] Não é nosso objetivo considerar aqui os detalhes a cerca da estabilidade nuclear.

▲ **Consequência Clássica:** O valor da carga elementar é tão pequena ($e = -1,6 \times 10^{-19}C$) que a diferença entre a carga de uma amostra típica um material (carregado) e outra maior ou menor em uma carga elementar não é significativa para percebermos a quantização da carga na escala macroscópica. Isto nos permite utilizar modelos de distribuição contínua de cargas para um objeto macroscópico carregado, mediante uma função chamada densidade de carga que indica como a carga se distribui pelo corpo [2]. O que isto significa? Se você sabe a carga de um objeto, por exemplo *um dielétrico*, isto não é suficiente para saber como esta carga está distribuída nele (ou em que partes do objeto há maior ou menor concentração de cargas), diferentemente de um sistema de partículas com as cargas e suas respectivas localizações conhecidas, o que chamamos distribuição discreta. A função densidade de carga de uma distribuição contínua nos informa como a carga está distribuída pelas partes do objeto além de informar a carga total do objeto. A densidade de carga do objeto é definida como sendo uma função $\rho(\vec{r})$ dos pontos $\vec{r}$ do espaço que fornece a carga por unidade de volume em cada um destes pontos, de modo que a integral é satisfeita

$$Q = \int_{\Omega} \rho(\vec{r}) \cdot d^3 r$$

onde Q é a carga do objeto na região Ω do espaço onde ele se encontra (aqui d^3r é o elemento de volume no espaço euclidiano tridimensional). A versão diferencial desta expressão é $dQ = \rho(\vec{r}) \cdot d^3r$, que nos diz a carga do corpo no volume d^3r em torno do ponto $\vec{r}$.

A princípio poderíamos ter em certos momentos partículas carregadas em movimento,

[2]Vale salientar que mesmo em ditribuições discretas podemos associar uma função densidade mediante o uso de um objeto matemático chamado funcional delta de Dirac. Aliás é o mesmo conceito que se usa para modelar a densidade de um sistema de partículas com massa. Veja, por exemplo, livros de física matemática.

por exemplo num material condutor, implicando que $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ dependesse eventualmente do tempo. Em tal caso, teríamos

$$Q(t) = \int_{\Omega} \rho(\vec{r}, t) \cdot d^3 r.$$

Na eletrostática vamos considerar apenas cargas em repouso em relação à um sistema de referência inercial, de tal modo que no caso contínuo isto implica que $\rho = \rho(\vec{r})$ é independe do tempo.

1.2 Forças Elétricas e Campos Elétricos

Vamos considerar duas partículas carregadas, uma com carga elétrica q_1 e outra com carga q, ambas em repouso num sistema de referência inercial. Se $\vec{r}$ é o vetor-posição da carga q em relação à q_1 então a força elétrostática que esta exerce sobre q é dada pela lei de Coulomb [3]:

$$\vec{F}_{q_1 \mapsto q} = \kappa_e \frac{q q_1}{r^2} \hat{r}$$

onde $\kappa_e = 1/(4\pi\epsilon_0)$ é uma constante positiva obtida experimentalmente e vale cerca de $9 \times 10^9 Nm^2/C^2$, $r = |\vec{r}|$ e $\hat{r} = \vec{r}/r$ é o vetor unitário na direção e sentido de $\vec{r}$.

Vale salientar que os fatos 1, 2 e 3 estão integrados nesta expressão.

Exercício: Verifique que esta expressão satisfaz a terceira lei de Newton, ou seja, mostre que $\vec{F}_{q_1 \mapsto q} = -\vec{F}_{q \mapsto q_1}$.

Se supormos n partículas (em repouso) com carga $q_j, j = 1, 2, 3..., n$, a força sobre uma outra partícula localizada pelos vetores r_1, r_2,..., r_n, respectivamente, então a força

[3] obtida com uma balança de torção.

que a distribuição <u>discreta</u> de <u>partículas</u> com cargas $\{q_j\}$ exerce sobre q é dada pelo princípio de superposição

$$\vec{F}_{q_j \mapsto q} = \sum_{j=1}^{n} k_e \frac{qq_j}{r_j^2} \hat{r}_j$$

onde $\vec{r_j}$ localiza q em relação à q_j, para todo j, $r_j = |\vec{r_j}|$, $\hat{r} = \vec{r}_j / r_j$ é o vetor unitário na direção e no sentido de $\vec{r}_j$. Se levarmos em conta a localização l_j das cargas q_j, temos

$$\vec{F}_{q_j \mapsto q} = \sum_{j=1}^{n} k_e \frac{qq_j}{|\vec{r} - \vec{l}_j|^2} \frac{\vec{r} - \vec{l}_j}{|\vec{r} - \vec{l}_j|}$$

Para o caso de uma distribuição contínua de cargas (por ex., arame carregado, borracha carregada, placa carregada etc. ou uma mistura de coisas deste tipo possivelmente com distribuições discretas também) a exxpressão da força envolveria integrais (nas partes contínuas) e somas (nas partes discretas). No caso de uma distribuição de cargas puramente contínua, temos, fazendo a passagem do discreto pro contínuo, $q_j \mapsto dq'$ e $\vec{l}_j \mapsto \vec{r}'$

$$\vec{F}_{\text{distr.} \mapsto q} = \int_{\text{distr.}} k_e \frac{q dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

onde o elemento de cargas pode ser conveniente escrito em termos de uma função densidade apropriada (linear, superficial e/ou volumétrica conforme o tipo de distribuição de cargas).

Note que a força eletrostática que uma distribuição de cargas exerce sobre uma carga de teste q é dada por

$$\vec{F}_{\text{distr} \mapsto q} = q \cdot \vec{E}_{\text{distr}}(\vec{r})$$

onde

$$\vec{E}_{\text{distr}}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^{n} k_e \frac{q_j}{r_j^2} \hat{r}_j = \sum_{j=1}^{n} k_e \frac{q_j}{|\vec{r} - \vec{l}_j|^2} \frac{\vec{r} - \vec{l}_j}{|\vec{r} - \vec{l}_j|}$$

no caso de distribuição discreta e

$$\vec{E}_{\mathrm{distr}}(\vec{r}) = \int_{\mathrm{distr}} k_e \frac{qdq}{r^2}\hat{r} = \int_{\mathrm{distr.}} k_e \frac{dq'}{|\vec{r}-\vec{r'}|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|}$$

no caso de distribuição contínua. Note que em ambos os casos o campo vetorial depende apenas da distribuição de cargas e do <u>ponto</u> onde está a carga de teste, mas não desta (estamos supondo cargas fixas, em particular que a carga teste seja pequena o suficiente para não alterar a distribuição de cargas em questão). A quantidade $\vec{E}$ é então designado como campo eletrostático ou coulombiano (pois guarda relação com a lei de Coulomb) produzido pela distribuição de cargas em questão no ponto P localizado pelo vetor $\vec{r}$. Ele desempenha o papel de transmissor de interações elétricas, mas este aspecto fica melhor evidenciado no contexto da eletrodinâmica onde temos cargas em movimento. Aí o mais geral campo eletromagnético transporta energia, momento e momento angular... mas isto é uma história pra ser contada depois. Por enquanto é importante perceber que, uma vez determinando o campo $\vec{E}(\vec{r})$ de uma distribuição de cargas, temos a força $\vec{F} = q \cdot \vec{E}(\vec{r})$ colocada sobre uma carga-teste q colocada em $\vec{r}$ o que nos permite analisar o movimento de q pelas leis da mecânica. Note que a unidade de $\vec{E}$ é, no MKS, o N/C.

Exercício primeiro E, depois F , casos continuos e discretos

1.3 Potencial Eletrostático

Lembremos da expressão do campo eletrostático de uma distribuição discreta (o caso contínuo corresponde essencialmente a troca de uma soma por uma integral):

$$\vec{E}_{\mathrm{distr}}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^{n} k_e \frac{q_j}{r_j^2}\hat{r}_j = \sum_{j=1}^{n} k_e \frac{q_j}{|\vec{r}-\vec{l}_j|^2}\frac{\vec{r}-\vec{l}_j}{|\vec{r}-\vec{l}_j|}.$$

Lembre também, do curso de cálculo de uma variável que,

$$\frac{1}{|x-l|^2} \cdot 1 = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{|x-l|}\right)$$

A versão tridimensional desta expressão é

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{l}_j|^2}\frac{\vec{r}-\vec{l}_j}{|\vec{r}-\vec{l}_j|} = -\vec{\nabla}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{l}_j|}\right].$$

Com isto, a expressão do campo torna-se,

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$$

onde

$$V(\vec{r}) = \sum_{j=1}^{n} k_e \frac{q_j}{r_j} = \sum_{j=1}^{n} k_e \frac{q_j}{|\vec{r}-\vec{l}_j|}$$

no caso discreto e

$$V(\vec{r}) = \int_{\text{distr}} k_e \frac{dq}{r} = \int_{\text{distr}} k_e \frac{dq'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

no caso contínuo. Estas funções escalares $V((\vec{r})$, cujo gradiente fornece, a menos de um sinal, o campo eletrostático, é chamada potencial eletrostático (ou coulombiano) da distribuição em foco no ponto $\vec{r}$. Note que se V satisfaz $\vec{E} = -\nabla\vec{V}$ então V+constante fornece o mesmo campo $\vec{E}$. No entanto o potencial coulombiano acima definido é tal que se anula no infinito. Dizemos que este potencial é em relação a um ponto de referência no infinito ($\lim_{r\mapsto\infty} V(\vec{r}) = 0$) [4]. Agora , considere o problema inverso: é possível obter V a partir de $\vec{E}$? Sim. Usando cálculo de várias variáveis, temos

$$dV = \vec{\nabla}V \cdot d\vec{r} = -\vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

que, integrando,

$$V(\vec{r}) - V(\vec{r}_0) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

[4]Este ponto de refência no infinito não é possível em duas dimensões. Aguarde a lei de Gauss, obtenha $E(\vec{r})$ de uma partícula em duas dimensões e em seguda calcule V !

Esta integral independe do caminho que liga $\vec{r}_0$ à $\vec{r}$, por construção, pois só depende da diferença $V(\vec{r}) - V(\vec{r}_0)$. Logo, admitindo $V(\vec{r}_0) = 0$ para o potencial no ponto de referência $\vec{r}_0$ (usualmente tomado no infinito, sempre que possível), temos

$$V(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Vamos destacar aqui fatos importantes: O campo vetorial eletrosotático $\vec{E}$ desempenha o papel de transmissor da interação elétrica $\vec{F}$ sobre uma carga de teste q colocada no ponto de observação do campo, o que é manifesto pela expressão $\vec{F} = q\vec{E}$. Esta é a interpretação do campo $\vec{E}$: força sobre uma carga por unidade de carga. Mas qual a interpretação do potencial eletrostático V? Para responder, note que

$$q \cdot V(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \{-q\vec{E}(\vec{r})\} \cdot d\vec{r}$$

que corresponde ao trabalho realizado por um agente externo para trazer a carga de teste q contra as forças elétricas (sem acelerar, evitando radiação) do ponto de referência $\vec{r}_0$ até o ponto $\vec{r}$; este trabalho é realizado lentamente (adiabaticamente) para não sair do contexto eletrostático. Este agente externo, ao realizar este trabalho, forneceu energia (pois trabalho é, mecânica e termodinamicamente, uma forma de transmissão de energia). a energia adquirida dessa forma pela carga q é chamada energia potencial elétrica de q em presença das fontes do potencial V e escrevemos

$$\mathcal{U}(q, \vec{r}) = qV(\vec{r}).$$

Esta é, portanto, a interpretação do potencial: energia potencial de uma carga por unidade de carga.

Exercício: Calcular V de uma distribuição de cargas, depois E.

Energia de uma Configuração de Cargas:

Vamos calcular a energia de um sistema de n cargas.

$\star$ Para trazer (adiabaticamente) a primeira carga sem nehuma nas proximidades o trabalho do agente externo é zero:

$$\mathcal{U}_1 = 0.$$

$\star$ Para trazer (adiabaticamente) a segunda, na presença da primeira que foi trazida, o agente externo realiza o trabalho

$$\mathcal{U}_2 = q_2 \cdot k_2 \frac{q_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}.$$

$\star$ Para trazer (adiabaticamente) a terceira carga na presença das anteriormente trazidas o agente externo realiza o trabalho

$$\mathcal{U}_3 = q_3 k_e \left(\frac{q_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|} + \frac{q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} \right)$$

e assim por diante até trazer a n-ésima carga. A energia potencial eletrostática do sistema de n cargas será então a soma $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + ...$, que pode ser reescrita como

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_j \sum_{l \neq j} k_e \frac{q_j q_l}{|\vec{r}_j - \vec{r}_l|}$$

Exercício: energia de um sistema

1.4 Dipolos Elétricos

O chamado dipolo é um sistema de duas partículas com carga de mesmo módulo mas com sinais contrários, digamos $-q$ e $+q$, sendo $+q$ localizada, digamos, por um vetor $\vec{l}$ em relação a $-q$. Por simplicidade, vamos considerar que o dipólo está sobre o eixo

X com $-q$ na origem $+q$ na posição $l\hat{i}$, $l > 0$. Vamos então calcular o potencial eletrostático $V(x)$ num ponto x sobre o eixo X para $x \gg l$ (potencial sobre o eixo do dipólo). Temos

$$V(x) = k_e \frac{-q}{x} + k_e \frac{+q}{x-l} = k_e q \left[\frac{1}{x-l} - \frac{1}{x} \right]$$

Usando expansão de Taylor

$$V(x) = k_e q \left[-l \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) + \frac{1}{2!} \left(-l \frac{d}{dx} \right)^2 \left(\frac{1}{x} \right) + ... \right]$$

Considerando $x \gg l$ temos

$$V(x) \approx k_e \frac{ql}{x^2}.$$

O campo eletrostático do dipolo (sobre o eixo X), em pontos $x \gg l$, é então

$$\vec{E} = \frac{dV}{dx} \hat{i} = 2k_e \frac{q(l\hat{i})}{x^3} = 2k_e \frac{q\vec{l}}{x^3} \quad \Longrightarrow \quad \vec{E} = 2k_e \frac{\vec{p}}{x^3}$$

onde

$$\vec{p} = q\vec{l},$$

que leva em conta o módulo de qualquer das duas cargas e o vetor de separação entre elas orientado para a carga positiva, é chamado momento de dipólo elétrico. É importante salientar que se um dipólo, com as cargas fixas nas extremidades de uma barra rígida neutra, é colocado num campo elétrico externo $\vec{E}$ então a carga negativa tende à se deslocar no sentido oposto ao campo enquanto a positiva tende a se mover no sentido do campo (pois $\vec{F} = \mp q\vec{E}$). Assim haverá um torque sobre o dipólo que tende a alinhar o momento de dipólo $\vec{p} = q\vec{l}$ na direção e no sentido do campo (pois $\vec{l}$ aponta para $+q$). Se $\vec{r}_1$ localiza $-q$ e $\vec{r}_2$ localiza $+q$ então o torque sobre o dipólo em virtude do campo externo $\vec{E}$ é dado por

$$\vec{N} = -q\vec{r}_1 \wedge \vec{E}(\vec{r}_1) + q\vec{r}_2 \wedge \vec{E}(\vec{r}_2) = q \left[\vec{r}_2 \wedge \vec{E}(\vec{r}_2) - \vec{r}_1 \wedge \vec{E}(\vec{r}_1) \right]$$

e se o campo externo for constante temos

$$\vec{N} = q(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \wedge \vec{E} = q\vec{l} \wedge \vec{E} \quad \Longrightarrow \quad \vec{N} = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

apesar da força total sobre o dipólo ser nula neste caso (responda porque como exercício). Para o caso em que $|\vec{l}|$ é muito pequeno e q é suficientemente grande, de modo que o momento de dipólo $\vec{p}$ seja finito, o que denominamos um dipólo puntiforme ou pontual, a expressão do torque acima é válida na forma $\vec{N}(\vec{r}) = \vec{p} \wedge \vec{E}(\vec{r})$ onde $\vec{r}$ é o vetor posição do dipólo pontual. Uma situação que representa bem o modelo de dipólo pontual é aquele em que o vetor $\vec{l}$ de separação entre as cargas $-q$ e $+q$ possui módulo muito menor que o do vetor $\vec{r}$ que localiza $-q$ (e portanto que localiza o dipólo).

Relembremos o fato de que um dipólo usual é um sistema de duas partículas, sendo uma com carga menor $-q$ e a outra com carga maior $+q$ com vetor-posição $\vec{l}$ em relação à $-q$, e o correspondente momento de dipolo $\vec{p} = q\vec{l}$ associado ao sistema aponta, portanto, para a partícula do sistema que tem maior carga. De forma mais geral podemos considerar, por exemplo, um dipólo de cargas $2q$ e $5q$ ou mesmo associar um momento de dipolo a um sistema de três cargas (como na molécula da água, H_2O, que tem três sítios de carga e possui momento dipolar, como está nos livros de química). Para generalizarmos de maneira natural o conceito de momento de dipolo, suponha que a carga $q_1 = -q$ está na posição $\vec{r}_1$ e que a carga $q_2 = -q$ está na posição $\vec{r}_2$. Então o momento de dipolo é

$$\vec{p} = q\vec{l} = q(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{r}_1(-q) + \vec{r}_2(+q)$$

ou seja,

$$\vec{p} = \vec{r}_1 q_1 + \vec{r}_2 q_2$$

Assim uma maneira natural de definir o momento de dipolo de um sistema de partículas carregadas $\{q_1, q_2, ..., q_n\}$ fixas nas posições dadas, respectivamente, por $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n\}$ é designar

$$\vec{p} = \sum_{j=1}^{n} \vec{r}_j q_j$$

que, além de ser compatível com o momento de dipolo usual, reflete o fato de que, para $\vec{r}_j$'s de mesmo módulo, as cargas de maior valor tem mais influência no somatório do que as cargas de menor valor. Dessa forma o vetor $\vec{p}$ apontará para uma região de maior quantidade de carga, o que é desejável para se falar em dipolo. A nível macroscópico podemos ter um sistema contínuo de cargas, digamos uma distribuição volumétrica na região Ω; neste caso o momento de dipólo do sistema é definido por

$$\vec{p} = \int_{\text{distr}} \vec{r} dq = \int_{\Omega} \vec{r} \rho(\vec{r}) d^3 r.$$

Para mostrar a importância do conceito de momento de dipólo (e de outros momentos de ordens maiores) reconsideremos a expressão do potencial eletrostático para uma distribuição contínua, que por simplicidade suporemos estar numa região compacta em torno da origem (exemplo, um núcleo atômico):

$$V(\vec{r}) = \int_{\text{distr}} k_e \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Aqui vamos usar, na função $f(\vec{r}) = 1/|\vec{r}|$ (de modo que $f(\vec{r} - \vec{r}') = 1/|\vec{r} - \vec{r}'|$), a expansão de Taylor em três dimensões,

$$f(\vec{r} + \vec{h}) = f(\vec{r}) + \left(\vec{h} \cdot \vec{\nabla}\right) f(\vec{r}) + \frac{1}{2!} \left(\vec{h} \cdot \vec{\nabla}\right)^2 f(\vec{r}) + \frac{1}{3!} \left(\vec{h} \cdot \vec{\nabla}\right)^3 f(\vec{r}) + ...,$$

com $\vec{h} = -\vec{r}'$:

$$V(\vec{r}) = \frac{k_e}{|\vec{r}|} \int_{\text{distr}} dq' - k_e \int_{\text{distr}} dq' \vec{r}' \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r}|}\right) + \text{outros termos}$$

$$\therefore \quad V(\vec{r}) = \frac{k_e}{|\vec{r}|}\int_{\text{distr}} dq' + \frac{k_e \vec{r}}{|\vec{r}|^3}\cdot\int_{\text{distr}} \vec{r}' dq' + \text{outros termos}$$

ou seja

$$V(\vec{r}) = \frac{k_e}{|\vec{r}|}Q + \frac{k_e \vec{p}\cdot\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \text{outros termos} \tag{1.4-1}$$

onde

$$Q = \int_{\text{distr}} dq'$$

é a carga ou momento de monopólo da distribuição e

$$\vec{p} = \int_{\text{distr}} \vec{r}' dq'$$

é o momento de dipolo da distribuição, que já havíamos definido. Os outros termos correspondem a momentos de quadropólos, octopólos etc. sobre os quais não falaremos agora, mas apenas mencionaremos que eles são usados em física nuclear.

A expansão (1.4-1) completa é conhecida como expansão multipolar e é importante também para obter o potencial V (e portanto o campo eletrostático $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$) de uma distribuição de cargas com o grau de precisão desejado, quando outros métodos se mostram inadequados, por exemplo quando a distribuição de cargas torna a integral do potencial difícil de ser calculada. No nosso caso o conceito geral de momento de dipólo nos possibilitará uma descrição simplificada da eletrostática em meios materiais. A expressão diferencial $d\vec{p}' = \vec{r}' dq' = \vec{r}' \rho(\vec{r}') d^3 r'$ corresponde a um dipolo pontual ou puntiforme localizado em $\vec{r}'$, o qual produz, no ponto $\vec{r}$, o potencial $dV_{\text{dip}} = \kappa_e \cdot d\vec{p}' \cdot \vec{r}/|\vec{r}|^3$ em pontos $\vec{r}$ distantes da distribuição (compacta em torno da origem): $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$. Num ponto $\vec{r}$ qualquer o potencial do dipólo pontual de momento $d\vec{p}'$ é dado por

$$dV_{\text{dip}} = \frac{\kappa_e \cdot d\vec{p}' \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

Exercício: calcule o campo de um dipolo usual em pontos distantes (use o potencial da teoria)

1.5 Lei de Gauss

Vamos calcular a integral de um campo eletrostático de uma partícula com carga Q no centro de uma superfície esférica S externamente orientada por um campo de vetores normais $\hat{n}$ (para fora de S):

$$\int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \int_S \frac{\kappa_e Q}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{n} dA = \int_S \frac{\kappa_e Q}{r^2} dA,$$

visto que, no presente caso, $\hat{r} = \hat{n}$. Nos pontos da esfera S temos que $r = |\vec{r}|$ é o raio desta esfera de modo que

$$\int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{\kappa_e Q}{r^2} \int_S dA$$

em que $\int_S dA = 4\pi r^2$ é a área da superfície esférica. Logo, pondo $\kappa = 1/(4\pi\epsilon_0)$,

$$\int_S \vec{E} \cdot \hat{n} \cdot dA = 4\pi\kappa Q \implies \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} \cdot dA = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Este resultado chama atenção pelo fato de não manifestar dependência com o raio da superfície esférica nem com a localização da carga dentro desta superfície. Importante observar que se não houver carga dentro da superfície esférica temos $Q = 0$, donde $\int_S \vec{E}\hat{n} dA = 0$ (pois simplesmente $\vec{E} = 0$). É possível mostrar que se houver uma única partícula (em repouso) com carga Q dentro de uma superfície fechada S qualquer temos

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

onde $d\vec{S} = \hat{n} dA$, sendo n o campo de vetores normais sobre S externamente orientados. Mais ainda, se houver mais partículas em repouso dentro de S, digamos com carga

Q_1, Q_2,...,Q_n, não importando seus sinais (ou mesmo um sistema contínuo de cargas), temos, por superposição, que o campo total é $\vec{E} = \sum_j \vec{E}_j$ (com integral no lugar de soma no caso contínuo), onde $\vec{E}_j$ é o campo associado à Q_j. E então, pela linearidade da integral,

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S \sum_j \vec{E}_j \cdot d\vec{S} = \sum_j \int_S \vec{E}_j \cdot d\vec{S} \implies \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_S}{\epsilon_0}$$

onde $Q_S = \sum_j Q_j$ é a carga líquida (total) dentro de S. Este resultado é designado como lei de Gauss e é mais geral do que a expressão do campo eletrostático coulombiano, pois vale mesmo quando as cargas estão em movimento qualquer. Do ponto de vista eletrostático a lei de Coulomb e a lei de Gauss se equivalem (pode-se mostrar sem dificuldade que a lei de Gauss implica na lei de Coulomb). Apesar de termos obtido a lei de Gauss a partir do campo coulombiano, com cargas em repouso, isto não implica na reciprocidade de que a lei de Gauss imponha cargas em repouso. A lei de Gauss vale, além da eletrostática, para cargas em movimento: isto é comprovado experimentalmente.

Exercícios, probls. com simetria

1.6 Dielétricos e Lei de Gauss

Polarização de um Dielétrico

Vamos considerar um meio material isolante (dielétrico) inicialmente neutro e com seus dipólos moleculares aleatoriamente desordenados, caso o meio seja constituído de moléculas polares. Suponha que uma distribuição de cargas $\rho(\vec{r}')$ seja rigidamente colocada neste meio material. No entanto vamos chamá-las de cargas "*livres*" pelo fato de poderem ser colocadas neste meio de maneira arbitrária (a situação real em que estas cargas não estejam totalmente fixadas no meio requer promediações). Podemos imaginar que, no momento em que são colocadas, estas cargas produzem de início um campo elétrico $\vec{E}_0$. Caso o meio seja formado por moléculas apolares o campo "externo" $\vec{E}_0$ começa a formar dipolos moleculares e estes tendem a se alinhar com o campo $\vec{E}_0$ (no caso de um dielétrico formado por moléculas polares seus momentos de dipólos também tendem a se alinhar com o campo): dizemos que o meio se polariza; se não fosse o campo $\vec{E}_0$ (ou sem a distribuição de cargas ρ) os possíveis dipolos moleculares poderiam estar em ordem aleatória e, neste caso o material não estaria polarizado. Macroscopicamente podemos considerar o meio como se fosse contínuo e, então, imaginá-lo com sendo formado por um aglomerado de pequenas regiões de volume d^3r', cada qual, após a polarização do meio, com um momento de dipólo (pontual) associado $d\vec{p'} = \vec{r'}dq'$ que contribui no potencial e, portanto, no campo total no regime eletrostático após a polarização do meio. A princípio pode ser que em algumas regiões do meio material a polarização ou o momento de dipólo seja maior. Para levar isto em consideração define-se uma quantidade chamada vetor polarização $\vec{P}(\vec{r'})$ que corresponde ao momento de dipolo por unidade de volume, ou seja, $d\vec{p'} = \vec{P}(\vec{r'})d^3r'$ por definição.

Potencial em um Meio Dielétrico após a Polarização

Assim duas fontes contribuem (por superposição) no potencial e, portanto, no campo elétrico final após o processo de polarização e atingido o regime eletrostático: *a*) A densidade de carga (fixa) $\rho(\vec{r'})$ que contribui no campo inicial $\vec{E}_0$; *b*) A polarização

$\vec{P}(\vec{r}')$ do meio material [5].

O potencial eletrostático num ponto $\vec{r}$ dentro do meio material após a polarização é então

$$V(\vec{r}) = \int_\Omega d^3r' \left\{ \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{(\vec{r}-\vec{r}') \bullet \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right\}$$

onde Ω é a região do material dielétrico, suposra suficientemente grande. Tendo em vista que

$$\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right)$$

podemos também escrever

$$V(\vec{r}) = \int_\Omega d^3r' \left\{ \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \vec{P}(\vec{r}') \bullet \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \right\}$$

que integrando por partes o segundo termo obtemos

$$V(\vec{r}) = \int_\Omega d^3r' \left\{ \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{\vec{\nabla}' \bullet \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right\} + \int_\Omega d^3r' \left\{ \vec{\nabla}' \bullet \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right\}.$$

Pelo teorema de Gauss para o divergente

$$V(\vec{r}) = \int_\Omega d^3r' \left\{ \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{\vec{\nabla}' \bullet \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right\} + \oint_S \left\{ \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \bullet \hat{n}(\vec{r}') \cdot da' \right\}$$

onde S é a superfície fechada que delimita (ou é a fronteira de) Ω e $\hat{n}(\vec{r}')$ é um campo de vetores normais à S externamente orientado.

Não é difícil perceber que este potencial corresponde ao potencial de uma distribuição de cargas com parte volumétrica, de densidade total $\rho_t(\vec{r}') = \rho(\vec{r}') - \vec{\nabla}' \bullet \vec{P}(\vec{r}')$, e parte superficial, com densidade $\sigma(\vec{r}') = \vec{P}(\vec{r}') \bullet \hat{n}(\vec{r}')$ (note que a polarização contribui com duas densidades, uma volumétrica e outra superficial). Vamos considerar o caso em que

[5]Estamos supondo que o meio seja constituído de uma substância simples o suficiente para que não haja contribuições apreciáveis de multipolos de ordens maiores.

a densidade de cargas fixas $\rho(\vec{r}')$ está definida numa região compacta suficientemente interior à Ω e com volume muito menor do que Ω o bastante para podermos desprezar a polarização na fronteira S de Ω. Então

$$V(\vec{r}) = \int_\Omega d^3r' \frac{\rho(\vec{r}') - \vec{\nabla}' \bullet \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

que corresponde ao potencial associado à carga total $\rho_T(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) - \vec{\nabla} \bullet \vec{P}(\vec{r})$, onde $\rho_P(\vec{r}) \equiv -\vec{\nabla} \bullet \vec{P}(\vec{r})$ é a densidade de carga associada à polarização.

Lei de Gauss em um Meio Dielétrico. Equações da Eletrostática

Pelo que acabamos de abordar podemos então obter a lei de Gauss em um meio dielétrico pondo $\rho_T(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) - \vec{\nabla} \bullet \vec{P}(\vec{r})$ no lugar de $\rho(\vec{r})$ e assim temos

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Omega_S} \left(\rho(\vec{r}) - \vec{\nabla} \bullet \vec{P}(\vec{r})\right) d^3r'$$

onde $\Omega_S \subset \Omega$ e $S = \partial\Omega$. Usando o teorema do divergente de Gauss

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Omega_S} \rho(\vec{r}) - \frac{1}{\epsilon_0} \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S},$$

ou seja

$$\int_S \left(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right) \cdot d\vec{S} = Q_S.$$

que é a lei de Gauss no meio material em consideração. Agora definindo o vetor deslocamento elétrico $\vec{D}$ por

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

a lei de Gauss torna-se

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_S.$$

Esta é uma das equações gerais da eletrostática embora ela seja válida mesmo quando as cargas se movem (eletrodinâmica). O vetor deslocamento elétrico $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ leva em consideração a polarização $P(\vec{r}) = d\vec{p}/d^3r$, que é o momento de dipólo por unidade de volume do meio material em foco (dielétrico), sobre a qual falaremos adiante.

Uma outra equação da eletrostática diz respeito existência do potencial eletrostático V que satisfaz a integral

$$V(\vec{r}) - V(\vec{r}_0) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r},$$

ao longo de qualquer caminho de $\vec{r}_0$ à $\vec{r}$. Nesta integral o campo E é, pelo princípio de superposiçao, a soma do campo $\vec{E}_0$ das cargas inicialmente fixadas no meio (ρ) mais o campo $\vec{E_P}$ associado as cargas de polarização ($\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$). A integral do potencial, equivale em termos do campo $\vec{E}$, à

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

ao longo de qualquer caminho fechado, que é a segunda equação da eletrostática, e só vale no contexto da eletrostática. A generalização desta equação para campos dependentes do tempo corresponde a lei de Faraday-Lenz que permitiu, junto com a generalização de Maxwell da lei de Ampère da magnetostática (que veremos no próximo capítulo), a produção de energia elétrica e a previsão de ondas eletromagnéticas (entre elas a luz visível). Estas generalizações e suas implicações, aplicações em circuitos elétricos etc. constituem assuntos do volume dois deste texto.

Meios Dielétricos e Meios Ferroelétricos:

O estado de polarização do meio é descrito por uma relação empírica $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$ denominada equação constitutiva. Para um meio dielétrico ideal (homegêneo, isotrópico) a relação constitutiva é da forma linear

$$\vec{P}(\vec{r}) = \epsilon_0(\mathcal{C} - 1) \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

onde, para o vácuo temos $\mathcal{C} = 1$ donde $\vec{P} = 0$, ou seja, ausência de polarização.

Para os dielétricos temos sempre $\mathcal{C} > 1$ o que faz com que $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \mathcal{C} \vec{E}$ e então

$$\int_S \epsilon_0 \mathcal{C} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_S = \int_S \epsilon_0 \vec{E}_0 \cdot d\vec{S}$$

donde, sendo S arbitrário, temos $E = E_0/\mathcal{C} < E_0$, ou seja, o campo elétrico $\vec{E}$ no regime eletrostático após a polarização é menor do que o campo externo inicial $\vec{E}_0$ das cargas fixadas antes da polarização. Isto já era de se esperar pois a polarização produz um campo que se opõe (enfraquece) o campo inicial, tendo em vista que os momentos de dipólos alinhados com o campo inicial produz um campo no sentido contrário (por exemplo da região de carga $+q$ para a de carga $-q$ no caso de uma molécula diatômica para a qual $\vec{p} = q\vec{l}$, com $\vec{l}$ apontando para $+q$, está alinhado com $\vec{E}_0$). Esta é uma característica fundamental dos materiais dielétricos, análogos dos **materiais diamagnéticos** os quais abordaremos mais adiante no estudo da magnetostática (aguarde!).

Não existem materiais paraelétricos (possíveis análogos dos paramagnéticos na magnetostática) para os quais $\mathcal{C} < 1$ e $E > E_0$, de forma que a polarização favorecesse o campo inicial $\vec{E}_0$.

No entanto existem materiais, como o titânio de bário ($BaTiO_3$), para os quais $\vec{P} \neq 0$ mesmo quando $\vec{E} = 0$ e são chamados ferroelétricos, análogos dos materiais ferromagnéticos (aguarde o estudo da magnetostática). Estes materiais naturalmente não obedecem a relação constitutiva linear $\vec{P}(\vec{r}) = \epsilon_0(\mathcal{C} - 1) \cdot \vec{E}(\vec{r})$.

É importante salientar que a capacitância $C = Q/|\Delta V|$, $|\Delta V| \sim |\vec{E}|$ [6], de um capacitor [7] aumenta de um fator $\mathcal{C}$ quando se preenche o espaço vazio entre as placas com um dielétrico (desprezando efeitos de borda), pois, como vimos, $|\vec{E}|$ diminui.

1.7 Exercícios

[6] De fato de $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ segue que $-\int \vec{E} \bullet d\vec{r} = \int \vec{\nabla} V \bullet d\vec{r} = \int_{\{-Q;+Q\}} dV = \Delta V$ donde $|\Delta V| \sim |\vec{E}|$.

[7] Capacitor é um sistema de dois condutores com cargas de mesmo módulo e sinais contrários, $-Q$ e $+Q$.

Capítulo 2

Magnetostática

2.1 Introdução

Pelo menos desde a antiguidade sabe-se que determinadas pedras denominadas imãs naturais, encontradas na região da Magnésia na Ásia "Menor", atraem pedaços de metal. O termo magnetismo foi usado para designar o estudo das propriedades destas pedras magnéticas. Vejamos algumas:

• Verificou-se que pedaços de ferro eram atraídos mais intensamente por duas regiões do ímã chamadas pólos.

• Suspendendo-se um ímã de modo que ele possa girar livremente, verificou-se também que ele se orienta de forma que seus pólos apontam aproximadamente na direção norte-sul geográfica (daí o princípio da bússula magnética, um dos primeiros instrumentos de orientação na navegação). O pólo do ímã que aponta pro norte (respect., sul) geográfico denomina-se norte (respect., sul) magnético.

• Aproximando-se dois ímãs pelos lados dos pólos de mesmo tipo (respect., tipos diferentes), verificou-se repulsão (respect., atração). A própria terra é um ímã: seu norte (respect., sul) geográfico corresponde aproximadamente a um pólo sul (respect., norte) magnético.

• Cortando-se dois imãs tentando-se separar seus pólos verificou-se que os pedaços passam a constituir dois novo ímãs, cada qual com dois pólos distintos! Lembre que podemos ter isoladamente cargas de um certo tipo; no entanto não se detectou (até o momento) monopólos magnéticos ou cargas magnéticas isoladas!

Na segunda metade do séc. XVIII John Michel percebeu, usando uma balança de torção, que a força entre dois pólos magnéticos de ímãs diferentes é do tipo inverso do quadrado da distância entre eles, semelhante a interação entre partículas com carga elétrica. No início do séc. XIX Romagnosi e, depois, Oersted perceberam que um fio percorrido por uma corrente elétrica (cargas elétricas em movimento organizado) também provocava um efeito magnético: muda a orientação de uma bússula magnética próxima ao fio. Assim uma força magnética pode se manifestar a partir de cargas elétricas em movimento, o que sugere uma relação íntima entre eletricidade e magnetismo antes tratados como se não houvesse relação entre eles. Pouco depois de Oersted, Ampère obteve uma expressão para a força magnética entre dois fios suportando correntes elétricas.

A importância do estudo da eletricidade e do magnetismo e, mais ainda, do eletromagnetismo (teoria unificada) reside fortemente em aplicações tecnológicas: produção de energia elétrica, medidores, motores, autofalantes, HD's, equipamentos de gravação etc.

Corrente Elétrica:

Quando os extremos de um fio de cobre estão submetidos à uma diferença de potencial, digamos ligados aos pólos de uma bateria, os elétrons periféricos dos átomos do fio (elétrons livres) procuram se mover para o pólo positivo da bateria constituindo uma corrente elétrica. Nesta situação ("fio macroscópico") podemos desprezar a quantização da carga e considerar a corrente no fio como uma distribuição contínua de cargas em movimento. A intensidade de corrente é dada por

$$i_S = \frac{dq_S}{dt}$$

onde dq_S é a quantidade de carga que atravessa uma superfície transversal S do fio no tempo dt. Em uma superfície S qualquer, por exemplo imersa num material condutor, podemos definir a intensidade de corrente corrente através de S da mesma forma acima: quantidade de carga por unidade de tempo que atravessa S. Mas como esta corrente se distribui? Há partes de S com maior ou menor corrente que outras partes? Para tratar desta questão define-se uma quantidade denominada densidade de corrente (semelhantemente à densidade de carga na eletrostática): ela é a corrente por unidade de área. E mais ainda, a densidade de corrente leva em conta o sentido da corrente. Em termos precisos a densidade de corrente é uma função vetorial $\vec{J} = \vec{J}(\vec{r}, t)$ dos pontos $\vec{r}$ da superfície S e do tempo t tal que

$$i_S = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA$$

onde $\hat{n}(\vec{r})$ é um campo de vetores normais que fixa previamente uma orientação sobre S. Uma vez fixado $\hat{n}$ se cargas negativas atravessam S no sentido de $\hat{n}$, temos $i_S < 0$ e $\vec{J}$ deve ter orientação oposta à $\hat{n}$, o que é compatível com o sentido convencional da corrente. Agora suponha que S seja uma superfície esférica (fechada) e externamente orientada cuja carga Q_S dentro de S é positiva ($Q_S > 0$). Temos, naturalmente,

$$\oint_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA = i_S$$

mas suponhamos que a carga Q_S, "dentro"de S, diminui com o tempo e então $i_S = dQ_S/dt < 0$. Deste modo, como $\vec{J}$ aponta no sentido da carga saindo de S, ou seja, no sentido do vetor $\hat{n}$, então $\oint_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA > 0$ de modo que

$$\oint_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA = -\frac{dQ_S}{dt}.$$

Esta é a equação de continuidade, vale para qualquer superfície fechada S orientada externamente com carga Q_S de qualquer sinal e representa a lei de conservação da carga na forma integral global (Fato 3 da seção 1.1). Pelo teorema do divergente e pela regra de Leibnitz para derivação sob o sinal de integração

$$\int_{\Omega_S} \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}) d^3r = -\frac{d}{dt} \int_{\Omega_S} \rho(\vec{r}, t) d^3r = \int_{\Omega_S} \partial_t \rho(\vec{r}, t) d^3r$$

onde $\Omega_S = \partial S$ é a fronteira de Ω_S e como S é arbitrário, temos a forma diferencial (local)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) + \partial_t \rho(\vec{r}, t) = 0$$

Importante notar que $\vec{J}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{v}, t)\vec{v}(\vec{r}, t)$, onde $\vec{v}(\vec{r}, t)$ é a velocidade que o elemento de carga $\rho(\vec{r}, t)d^3r$ da corrente passa no ponto $\vec{r}$ no instante t. No caso extacionário (da magnetostática) temos $\rho = \rho(\vec{r})$ independente do tempo, ou seja, $\vec{\nabla}\vec{J}(\vec{r}) = 0$.

Vamos supor que, no caso do fio de cobre cilíndrico i_S é o mesmo em qualquer seção de fio durante todo o tempo: $i_s \equiv i =$ constante. Ou seja: a quantidade de carga que entra numa tampa de qualquer superfície cilindríca sai na outra tampa, qualquer que seja a expessura da superfície cilíndrica (distância entre as tampas), de modo que a equação de conservação da carga (continuidade) é satisfeita.

2.2 Forças e Campos Magnéticos

Força Magnética e Campo Magnético:

O fio pecorrido pela corrente i exerce, sobre uma partícula-teste com carga q e velocidade $\vec{v}$, uma força chamada força magnética (que pode eventualmente ser nula). Antes de apresentar a expressão desta força lembre que a força eletrostática que uma distribuição contínua (e estática) de cargas exerce sobre uma carga-teste q em repouso é dada por

$$\vec{F}_e = q \cdot \vec{E}.$$

onde

$$\vec{E} = \int_{\text{distr. cargas}} k_e \cdot \frac{dq \cdot \vec{r}}{r^3}.$$

Nesta integral $\vec{r}$ localiza q em relação ao elemento dq e $r = |\vec{r}|$, além do que $k_e = 1/4\pi\epsilon_0 \approx 9 \times 10^9 Nm^2/C^2$. O vetor $\vec{E}$ é chamado campo eletrostático que a distribuição de cargas produz no ponto onde está a carga q.

A força magnética que a corrente i exerce sobre a carga q quando esta possui velocidade $\vec{v}$ é dada por

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

onde

$$\vec{B} = \int_{\text{corrente}} k_m \frac{id\vec{s} \wedge \vec{r}}{r^3}.$$

Aqui $\vec{r}$ localiza q em relação ao elemento de deslocamento $d\vec{s}$, sobre o fio, orientado no sentido da corrente e $k_m = \mu_0/4\pi = 10^{-7} Nm^2/C^2$ é obtido experimentalmente (verifique a unidade!). Este $\vec{B}$ é chamado campo magnético da corrente i no ponto em que a carga q passa com velocidade $\vec{v}$. Nesta integral a expressão "$id\vec{s}\wedge$", referente a corrente, desempenha o papel que dq o faz na expressão de $\vec{E}$.

Observe que se a carga q tiver velocidade $\vec{v}$ na direção do campo magnético $\vec{B}$ então, neste instante, a força magnética sobre ela é nula.

Lei de Biot-Savart:

A expressão diferencial

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi} \frac{d\vec{s} \wedge \vec{r}}{r^3},$$

cujo sentido se realiza numa integral, é conhecida como lei de Biot-Savart. Note que o campo magnético da corrente i é o mesmo que o de uma corrente de cargas de sinal oposto, digamos de intensidade $-i$, se deslocando no sentido contrário, ou seja, no sentido de $-d\vec{s}$. Isto nos diz que uma corrente ou fluxo de cargas negativas (elétrons, por exemplo) produz o mesmo campo magnético que uma corrente de cargas positivas de mesmo módulo se movendo em sentido contrário com o mesmo valor da velocidade: este é o sentido convencional da corrente.

Note que $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B} \perp \vec{v}$ e portanto a força magnetostática não realiza trabalho.

Unidades:

A unidade de $\vec{B}$ no MKS (extendido) é o tesla T definido como sendo tal que ($\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$)

$$N = C \cdot \frac{m}{s} \cdot T$$

ou seja

$$T = N \cdot s/(C \cdot m).$$

A unidade de corrente é $C/s \equiv A$ denominada àmpere. Apresentaremos definições de ampère e coulomb na próxima seção.

Força de Lorentz:

Se a carga q está numa região onde há simultaneamente um campo elétrico $\vec{E}$ e um campo magnético $\vec{B}$ então a força sobre q é dada pela expressão

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$$

designada como força de Lorenz.

Campo Magnético de um Imã:

Como vimos, uma corrente elétrica i produz um campo magnético $\vec{B}$ (Oersted-Biot-Savart-Ampère...). Mas de onde vem (ou que corrente, se é que há alguma, produz) o campo magnético de um ímã? É uma questão delicada e uma resposta satisfatória vai além dos limites da física clássica. A idéia é que um elétron num átomo possui um momento angular, mesmo do ponto de vista do modelo atômico da teoria quântica, cuja versão clássica tem a ver com rotação em torno do núcleo, o que corresponde a, digamos, uma corrente elementar, fonte de campo magnético. Mais ainda, o elétron possui um momento angular intrínseco chamado spin, que nada têm a ver com movimento de rotação ou giro a não ser por semelhança de representação algébrica (detalhes a parte). Este spin contribui no momento angular total do elétron. Dependendo do material e das circunstâncias, os momentos angulares atômicos podem estar permanentemente alinhados dando origem à um campo magnético: é o caso dos ímãs. Quando não alinhados e aleatoriamente orientados, os campos magnéticos elementares se cancelam: é o caso da matéria normal, dita não magnetizada. E porque o ímã atrai dois pedaços de ferro mas os pedaços de ferro não se atraem? Quando um pedaço de ferro é colocado próximo de um ímã, este provoca alinhamento (não permanente) dos momentos angulares atômicos do ferro magnetizando-o e, portanto, ficando suscetível a interação magnética com o ímã (a magnetização é semelhante a polarização de um material eletricamente neutro). Isto não ocorre quando dois pedaços de ferro são colocados próximos um do outro e, por isto, não se atraem.

2.3 Exemplos

Exemplo 1 (Força de Lorentz Sobre uma Partícula Carregada): Um elétron (carga $q = -1,6 \times 10^{-19} C$) tem, num dado instante, velocidade $\vec{v} = 2,0 \times 10^6 (\hat{\imath} + \hat{\jmath}) m/s$ numa região onde existe um campo elétrico $\vec{E} = 1,0 \hat{\jmath} \cdot kV/mm$ e um campo magnético $\vec{B} = 0,50(\hat{\imath} + 2\hat{\jmath})T$. Vamos calcular a força (de Lorentz) "sentida"por este elétron.

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right) = (-1,6 \times 10^{-19})[1,0\hat{\jmath} \cdot kV/mm +$$

$$2,0 \times 10^6 (\hat{\imath} + \hat{\jmath}) m/s \wedge 0,50(\hat{\imath} + 2\hat{\jmath})T] = 1,6 \times 10^{-13} N(\hat{\jmath} + \hat{k}).$$

Exemplo 2 (Campo Magnético de um Fio Retilíneo Longo): Vamos usar a lei de Biot-Savart para calcular o campo magnético de um fio retilíneo infinito de corrente i constante a uma distância ρ do fio. Considere um sistema de coordenadas XYZ e suponha (sem perda de generalidade) que o fio jaz ao longo do eixo Z. Seja P um ponto fora de Z com coordenadas cilíndricas ρ, ϕ, z de modo que seu vetor-posição é $\vec{R} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$. Seja $\vec{s} = \xi\hat{z}$ o vetor-posição de um elemento do fio de modo que $d\vec{s} = d\xi \cdot \hat{z}$. Pondo $\vec{r} = \vec{R} - \xi\hat{z}$ na expressão da lei de Biot-Savart

$$\vec{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{s} \wedge \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{(d\xi \cdot \hat{z}) \wedge [\rho\hat{\rho} + (z - \xi)\hat{z}]}{[\rho^2 + (z - \xi)^2]^{3/2}} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \hat{\phi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho d\xi}{[\rho^2 + (\xi - z)^2]^{3/2}}$$

onde a ordem de integração de $-\infty$ para $+\infty$ se refere a uma corrente de cargas se movendo no sentido positivo do eixo Z ($d\xi > 0$). Fazendo a substituição $w = \xi - z$ temos $dw = d\xi$ e

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i \hat{\phi}}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho \cdot dw}{[\rho^2 + w^2]^{3/2}} = \frac{\mu_0 i \hat{\phi}}{4\pi} \cdot 2 \int_0^{+\infty} \frac{\rho \cdot dw}{[\rho^2 + w^2]^{3/2}}.$$

Agora pondo $w = \rho \tan\theta$ de modo que $dw = \rho \sec^2\theta d\theta$ temos

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i \hat{\phi}}{2\pi\rho} \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2\theta \cdot d\theta}{\sec^3\theta} \quad \therefore \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho}\hat{\phi}$$

Note que as linhas de campo magnético neste caso são círculos em torno do fio orientadas compativelmente com a regra da mão direita com o polegar apontando no sentido do eixo Z ($i > 0$).

Exemplo 3 (Campo Magnético no Eixo de uma Corrente Circular): Considere uma corrente circular i de raio R no plano XY (um circuito ou espira de corrente) centrada na origem e com o sentido de $\hat{\phi}$ (sentido anti-horário). Vamos usar a lei de Biot-Savart para obter o campo magnético $\vec{B}$ desta espira nos pontos do eixo Z, ou seja, nos pontos localizados por $z\hat{z}$. Pondo $d\vec{s} = R \cdot d\phi \cdot \hat{\phi}$ e $\vec{r} = -R\hat{\rho} + z\hat{z}$ temos, pela lei de Biot-Savart,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{corr.} \frac{d\vec{s} \wedge \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R \cdot d\phi \cdot \hat{\phi}) \wedge (-R\hat{\rho} + z\hat{z})}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2\hat{z} + Rz\hat{\rho})d\phi}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Aqui a integral referente ao termo $Rz\hat{\rho}$ no numerador do integrante é nula (verifique). Então

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2\hat{z} \cdot d\phi}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \hat{z}$$

que tem sentido apontado pelo polegar da mão direita quando a mão é posicionada de tal forma que os dedos girem naturalmente acompanhando o sentido de percurso da corrente. Note que exatamente no centro do circuito temos $\vec{B} = \mu_0 i\hat{z}/(2R)$. Mas para pontos distantes, $z \gg R$, temos

$$\vec{B} \approx \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{z^3} \cdot \hat{z} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i\pi R^2\hat{z}}{z^3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{m}}{z^3}$$

onde $\vec{m} = i\pi R^2\hat{z} = i\vec{A}$, sendo $\vec{A} = \pi R^2\hat{z}$ a “área orientada”do circuito correspondente. A quantidade $\vec{m}$ é chamada momento de dipólo magnético do circuito. Note a semelhança com a expressão do campo eletrostático de um dipolo elétrico em pontos distantes sobre o eixo (z) do dipolo, dada por

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}}{z^3}$$

onde $\vec{p} = q\vec{l}$ e $\vec{l} = l\hat{z}$ localiza a carga q em relação à $-q$, esta última colocada por simplicidade na origem. A quantidade $\vec{p}$ é o chamado momento de dipolo elétrico.

Exemplo 4 (Força Sobre uma Corrente, Definições de Ampère e Coulomb): A força sobre um fio de corrente i imersa num campo magnético (externo) $\vec{B}$ é dada pela superposição

$$\vec{F} = \int dq \cdot \vec{v} \wedge \vec{B} = \int i \cdot dt \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{B} \quad \therefore \quad \vec{F} = i \cdot \int d\vec{r} \wedge \vec{B}.$$

Considere um fio retilíneo de comprimento l suficientemente longo suportando uma corrente i_1 que, sem perda de generalidade, podemos supor no eixo Z. A força que este exerce sobre outro, paralelo e com corrente i no mesmo sentido de i_1, é

$$\vec{F} = i\int d\vec{r} \wedge \vec{B}_1$$

onde a integral é sobre o fio de corrente i ($d\vec{r} = dz \cdot \hat{z}$) e

$$\vec{B}_1 \approx \frac{\mu_0 \cdot i_1}{2\pi\rho} \cdot \hat{\phi}$$

é o campo magnético da corrente i_1. Segue então

$$\vec{F}_{1\mapsto i} = -\frac{\mu_0 i i_1 l}{2\pi\rho}\hat{\rho}$$

que é atrativa (se as correntes tivessem com sentidos contrários a força seria repulsiva). Note que a magnitude da força por unidade de comprimento entre fios paralelos é dada por

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0 i i_1}{2\pi\rho}.$$

O ampère é definido como a intensidade de corrente em dois fios retilíneos longos separados por uma distância de $\rho = 1m$ que provocaria entre eles uma força por unidade de comprimento de $2 \times 10^{-7} \cdot N/m$. E, então, o coulomb fica definido como a carga que atravessa em $1s$ uma seção de um fio percorrido por uma corrente de um ampère.

Exemplo 5 (Torque Sobre um Circuito, Funcionamento de Instrumentos de Medidas e Motores Elétricos):

a) A força magnética sobre um circuito (fechado) ou "loop" de corrente num campo magnético externo $\vec{B}$ é

$$\vec{F} = i \cdot \oint d\vec{r} \wedge \vec{B}.$$

Neste caso se o campo magnético externo $\vec{B}$ for constante (uniforme), a força magnética sobre o circuito será nula:

$$\vec{F} = i \cdot \left(\oint d\vec{r} \right) \wedge \vec{B} = 0.$$

b) Porém, mesmo neste caso, há um torque sobre o circuito dado por

$$\vec{N} = \oint \vec{r} \wedge d\vec{F} = \oint \vec{r} \wedge [i \cdot d\vec{r} \wedge \vec{B}] = i \oint \vec{r} \wedge [d\vec{r} \wedge \vec{B}]$$

que pode ser escrito como

$$\vec{N} = i \oint (\vec{r} \cdot \vec{B}) d\vec{r} - i \oint (\vec{r} \cdot d\vec{r}) \vec{B}.$$

A segunda integral é nula pois envolve a diferencial exata $\vec{r} \cdot d\vec{r} = d[(\vec{r} \cdot \vec{r})/2]$ integrada num caminho fechado (o circuito). Já a primeira pode ser reescrita numa forma conveniente mediante uso do teorema integral expresso por

$$\oint_C f(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_S da[\hat{n} \wedge \vec{\nabla} f(\vec{r})]$$

onde S é uma superfície com bordo C orientada por $\hat{n}$ compativelmente com a orientação de C. Com isto a expressão do torque sobre o circuito torna-se

$$\vec{N} = i \int_S da[\hat{n} \wedge \vec{\nabla}(\vec{r} \cdot \vec{B})] = i \int_S da[\hat{n} \wedge \vec{B}]$$

$$\therefore \quad \vec{N} = i \left[\int_S da(\hat{n}) \right] \wedge \vec{B}$$

visto que $\vec{B}$ é constante. Supondo que o circuito é plano (uma espira de corrente) podemos considerar S como sendo a região plana interior à C de modo que $\hat{n}$ ($\perp S$) é o mesmo em todos os pontos de S e assim

$$\vec{N} = i \left[\int_S da \right] \hat{n} \wedge \vec{B} \quad \therefore \quad \vec{N} = (iA\hat{n}) \wedge \vec{B}$$

onde A é a área da espira de corrente. Ou seja,

$$\vec{N} = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

onde $\vec{m} = iA\hat{n}$ é o momento de dipolo magnético da espira de corrente. Este resultado é análogo ao do torque sobre um dipolo elétrico imerso num campo eletrostático constante ($\vec{N} = \vec{p} \wedge \vec{E}$, onde $\vec{p} = q\vec{l}$ e $\vec{l}$ localiza $+q$ em relação à $-q$). Note que o torque sobre a espira independe da forma da espira e é o princípio de funcionamento de instrumentos de medidadas elétricas (galvanômetro etc.) e dos motores elétricos: o torque sobre a espira imersa no campo magnético pode provocar um giro da espira em torno de um eixo perpendicular $\hat{n}$ e a $\vec{B}$. Um motor elétrico comum, por exemplo, consiste de uma bobina constituida de um certo número N de espiras de mesma forma e tamanho e percorridas pela mesma corrente. Neste caso o momento magnético total bobina é N vezes o momento de cada espira: $\vec{m} = NiA\vec{n}$. O torque sobre a bobina é portanto N vezes maior.

Vale observar também que a expressão da energia de interação U do dipolo magnético com o campo magnético é obtida da mesma forma que a expressão da energia de um dipolo elétrico num campo elétrico externo: está associada com o trabalho de um agente externo para girar lentamente, ou adiabaticamente, o dipolo de uma inclinação de referência em relação ao campo (no caso, $\theta_0 = \pi/2$) até a posição em consideração. Ela é dada por

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}.$$

Note a semelhança desta com a expressão $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ da energia de interação de um dipolo elétrico $\vec{p}$ com o campo elétrico $\vec{E}$.

Vale salientar também que, para um dipolo magnético "puntiforme"(que pode ser imaginado como tendo grande intensidade de corrente num pequeno circuito, de forma que $\vec{m} = iA\vec{n}$ seja finito), o torque sobre o dipolo devido a um campo magnético não necessariamente constante é dado pela expressão: $\vec{N} = \vec{m} \wedge \vec{B}(\vec{r})$, onde $\vec{r}$ localiza o dipolo. E a energia de interação do dipolo com o campo é dada pela expressão $U(\vec{r}) = -\vec{m} \cdot \vec{B}(\vec{r})$, que agora depende em geral não só da inclinação do dipolo em relação ao campo (o que reflete a presença do produto escalar nesta expressão) mas também da localização $\vec{r}$ do dipolo. Mas neste caso haverá também uma força sobre o dipolo dada por

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U = \vec{\nabla}_r[\vec{m} \cdot \vec{B}(\vec{r})].$$

Naturalmente temos, para $\vec{B}$ constante, $\vec{F} = \vec{\nabla}_r(\vec{m} \cdot \vec{B}) = 0$.

2.4 Lei de Ampère

Na eletrostática dado um sistema de cargas e uma superfície S (orientada externamente por $d\vec{S}$) vale a lei de Gauss

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_S}{\epsilon_0}$$

onde q_S é a carga total líquida no interior de S. A lei de Gauss nos dá uma relação entre as cargas (q_S) e o campo eletrostático $\vec{E}$ que elas produzem.

Vamos apresentar uma relação semelhante para magnetostática, ou seja, uma relação integral entre uma corrente ou um sistema de correntes e o correspondente campo magnetostático produzido. Para tal considere inicialmente uma curva orientada fechada C nas proximidades de um fio retilíneo infinito de corrente "i"(exemplo 2 da seção anterior) e vamos calcular a integral de linha $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l}$, em que $d\vec{l}$ é um elemento de deslocamento sobre C compativelmente orientado com C:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} \hat{\phi} \cdot [d\rho \cdot \hat{\rho} + \rho \cdot d\phi \cdot \hat{\phi} + dz \cdot \hat{z}]$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi} (\phi_2 - \phi_1) .$$

Aqui é importante ter um certo cuidado. No caso em que a curva C não envolver o fio de corrente "i"temos $\phi_1 = \phi_2$ e então $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$ (o "similar"eletrostático disto ocorre quando a superfície de Gauss S não possui carga em seu interior, resultando em $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$). Mas no caso em que C envolver o fio no sentido anti-horário (compativelmente com o sentido da corrente, suposto como sendo o do eixo Z) temos $\phi_2 = \phi_1 + 2\pi$ e então

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot i. \qquad (2.4\text{-}1)$$

Se C estivesse orientada no sentido horário teríamos $\phi_2 = \phi_1 - 2\pi$ e então

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\mu_0 \cdot i$$

que vale também para curva anti-horária e cargas se movendo no sentido oposto ao do eixo Z.

Um resultado geral é:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot \sum_\alpha i_\alpha(C)$$

onde os $i_\alpha(C)$'s são as intensidades de correntes envolvidas pela curva C das quais são tomadas com sinal negativo aquelas que se orientam em sentido contrário a orientação do polegar quando a palma da mão direita está "voltada"para a orientação de C. Este resultado é equivalente a lei de Biot-Savart e é conhecido como lei de Ampère. Ele pode ser obtido escrevendo $\vec{B} = \sum_\alpha \vec{B}_\alpha$, onde $\vec{B}_\alpha$ é o campo produzido por i_α sozinha, e aplicando a relação (2.4-1) em cada integral resultante. De fato

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C \sum_\alpha \vec{B}_\alpha \cdot d\vec{l} = \sum_\alpha \oint_C \vec{B}_\alpha \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_\alpha i_\alpha(C).$$

Exemplos: Cilindro de corrente, Solenóide, Toróide (a digitar, qdo eu estiver escrevendo melhor que o Halliday, eu digito. Aviso aos navegantes que isto só vai acontecer em um tempo da ordem da idade do universo).

2.5 Síntese de Eletrostática e Magnetostática

Na eletrostática a equação fundamental que relaciona o campo eletrostático com as cargas-fonte é a lei de Gauss:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_S}{\epsilon_0}$$

onde S é uma superfície fechada externamente orientada por $d\vec{S}(\perp S)$ e Q_S é a carga total no interior de S. Na magnetostática a equação fundamental que relaciona o campo magnético $\vec{B}$ com as correntes que o produz é a lei de Ampère:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \cdot i_C$$

onde C é uma curva fechada simples orientada por $d\vec{r}$ e i_C é a soma das correntes envolvidas por C com a convenção de sinal negativo para aquelas que tiverem sentido "incompatível" com a orientação de C (via regra da mão direita). Podemos perguntar: se trocarmos $\vec{E}$ por $\vec{B}$ na integral de Gauss e $\vec{B}$ por $\vec{E}$ na integral de Ampère como serão as equações correspondentes? Raciocinando por simetria a integral de Gauss para $\vec{B}$ deve ser proporcional a uma, por assim dizer, carga magnética Q_m dentro de S enquanto que a integral de Ampère deve ser proporcional a, digamos, corrente de cargas magnéticas i_m envolvida por C. Acontece que nunca se detectou cargas magnéticas isoladas (monopolos magnéticos) nem correntes magnéticas na natureza. Isto nos permite escrever:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \text{ lei de Gauss do magnetismo,}$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \text{ lei de "Ampère" da eletrostática.}$$

As leis de Gauss para $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são válidas mesmo para situações não estáticas onde as cargas elétricas se movem de maneira arbitrária. Mas as leis de Ampère não valem sempre. Por exemplo, a equação $\int_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$ vale para cargas em repouso, enquanto que $\int_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \cdot i_C$ vale para correntes constantes. Para os casos em que as cargas se movem de maneira arbitrária, entram em cena a lei de Faraday e a lei de Ampère-Maxwell a serem vistas posteriormente.

2.6 Exercícios

01. Quais são os vetores que comparecem em $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, que formam pares sempre ortogonais entre si? quais os que não precisam ser sempre ortogonais?

02. Um elétron ($q = -1,6 \times 10^{-19} C$) com velocidade $\vec{v} = [2,0 \times 10^6 \hat{\imath} + 3,0 \times 10^6 \hat{\jmath}] m/s$ penetra numa região onde há um campo magnético $\vec{B} = [0,03\hat{\imath} - 0,15\hat{\jmath}]T$. Determine a) a força sobre o elétron. b) Repita o cálculo para o próton com a mesma velocidade.

03. Um elétron entra num campo magnético uniforme com uma velocidade $\vec{v} = [4,0 \times 10^4 \hat{\imath} - 2,5 \times 10^5 \hat{\jmath}] m/s$ e sofre ação de uma força magnética de componentes $F_x = 2,5 \times 10^{-12} N$ e $F_y = 4,0 \times 10^{-13} N$. O ângulo entre a velocidade inicial e o campo magnético $\vec{B}$ é 30^o. Calcule $|\vec{B}|$ e determine o trabalho que esta força realiza quando o elétron se desloca $2,0 cm$.

04. Um elétron com velocidade $\vec{v} = 300\hat{\imath} + 400\hat{\jmath} - 100\hat{k}$ sofre a ação simultânea de um campo elétrico $\vec{E} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath}$ e de um campo magnético $\vec{B} = 0,04\hat{\imath} - 0,01\hat{\jmath}$ (em unidades do MKS). Calcule a força sobre o elétron e a aceleração deste.

05. Considere um modelo clássico de átomo formado por um elétron com carga q e massa m_q em órbita circular de raio R em torno de um núcleo em repouso. a) Mostre que o momento angular deste sistema (em relação ao núcleo) é dado por $\vec{L} = m_q R v \hat{z}$, onde v é o módulo da velocidade do elétron e $\hat{z}$ é o vetor unitário perpendicular à órbita do elétron (Ajuda: escreva o vetor-posição e a velocidade do elétron em relação ao núcleo no sistema de coordenadas cilíndricas). b) Definindo a corrente eletrônica circular por $i = |q|/T$, onde T é o período do movimento circular do elétron, mostre que $\vec{L} = -(2m_q/|q|)\vec{m}$ onde $\vec{m} = i\pi R^2(-\hat{z})$ é o momento de dipolo magnético associado ao sistema (explique o sinal negativo!). Este modelo exibe o fato de que o momento angular atômico está associado ao correspondente momento magnético e, portanto, é fonte de um campo magnético que, no eixo z, é, pelo que vimos neste texto, dado por $\vec{B}(z) = \mu_0\vec{m}/(2\pi z^3)$. Isto dá uma idéia quantitativa do campo magnético do ímã. Neste material, os momentos angulares atômicos e, portanto, os momentos magnéticos associados estão permanentemente alinhados "produzindo" um campo magnético macroscópico.

06. Um fio de metal de massa m pode deslizar sem atrito sobre dois trilhos separados por uma distância d (figura a seguir). Os trilhos, colocados horizontalmente numa região onde há um campo magnético vertical $\vec{B} = B\hat{k}$, são percorridos por uma corrente constante i, mantida pelo gerador $\mathcal{G}$. Calcule a velocidade do fio em função do tempo, supondo-o em repouso no instante $t = 0$.

07. Um fio retilíneo de comprimento $40cm$ está sobre o eixo X e uma corrente $i = 2,0A$ passa através do fio no sentido de oeste para leste (sentido do próprio eixo X). O fio está imerso num campo magnético $\vec{B} = [0,002\hat{\imath} - 0,0005\hat{\jmath}0,003\hat{k}]T$. Determine a força magnética sobre o fio.

08. A figura a seguir mostra uma bobina de 20 espiras retangulares de $10cm$ por $5,0cm$. A bobina é percorrida por uma corrente de 0,10A, podendo girar em torno de um de seus lados. Determine o torque que atua sobre a bobina quando colocada com seu plano fazendo 30^o com $\vec{B} = 0,25T\hat{\jmath}$.

09. Um próton, um elétron e uma partícula alfa (carga de dois prótons) penetram com a mesma energia cinética num campo magnético uniforme $\vec{B}$, perpendicular às suas velocidades. Compare os valores dos raios das suas trajetórias circulares.

10. Um elétron possui energia cinética $10keV$ e percorre uma circunferencia de raio $25cm$ num plano ortogonal a um campo mgnético uniforme. Calcule: (a) o módulo da indução magnética $\vec{B}$, (b) a frequência de cíclotron.

11. (**Efeito Hall, 1879.**) Uma amostra de material retangular de espessura t e largura d conduz uma corrente i na direção x e um campo magnético uniforme $\vec{B}$ é aplicado na direção y. Se os portadores de carga forem positivos, a força magnética os desvia na direção z. A carga positiva se acumula na superfície superior da amostra e carga negativa na superfície inferior, criando um campo elétrico para baixo (sentido de $-z$). No equilíbrio, a força elétrica para baixo atuando sobre os portadores de carga equilibra a força magnética para cima e os portadores de carga deslocam-se através da amostra sem desvio. É medida a chamada voltagem Hall $V_H = V_{\text{sup}} - V_{\text{inf}}$ entre as superfícies superior e inferior. (a) Mostre que os portadores de carga são negativos somente no caso em que a voltagem Hall é negativa (Nota: A experiência mostra que, nos metais, os portadores de carga são negativos, ou seja, $V_H < 0$). (b) Encontre o número n de portadores de carga por unidade de volume em termos de i, t, $|\vec{B}|$, V_H e da carga q de cada portador.